

Riconoscere e associare, riflessioni didattiche sul concetto di funzione

Lucca - 13 Settembre 2022

Alessandro Cordelli

La didattica della matematica:

Insegnamento di una materia letteraria

VS.

Forme-Pensiero

Fatti & Procedure

Top-Down

Autoreferenzialità

Manuale

Esercizi

Regole

Interrogazioni, compiti

Competenze

Bottom-Up

Dimensione esistenziale

IBSE

Giochi & Problemi

Argomentazione

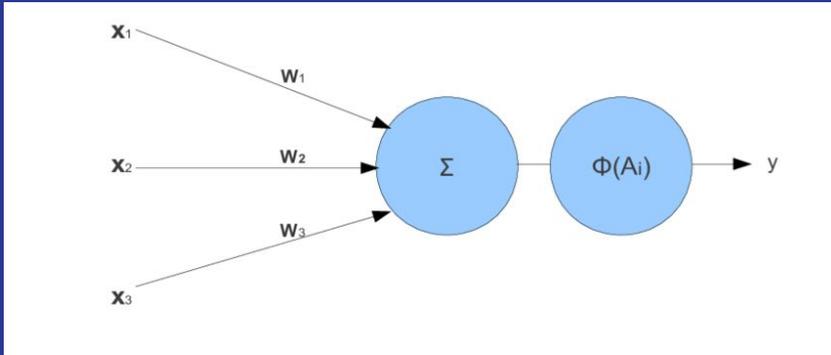
Verifiche complesse

Criticità evidente nell'ambito
“Relazioni e Funzioni” ...

Da un qualsiasi manuale...

funzione, dominio, immagine, variabile indipendente, variabile dipendente, forma esplicita, forma implicita, razionale intera, razionale fratta, irrazionale, trascendente, zeri, segno, iniettiva, suriettiva, biunivoca, inversa, monotona, crescente, decrescente, pari, dispari, periodica...

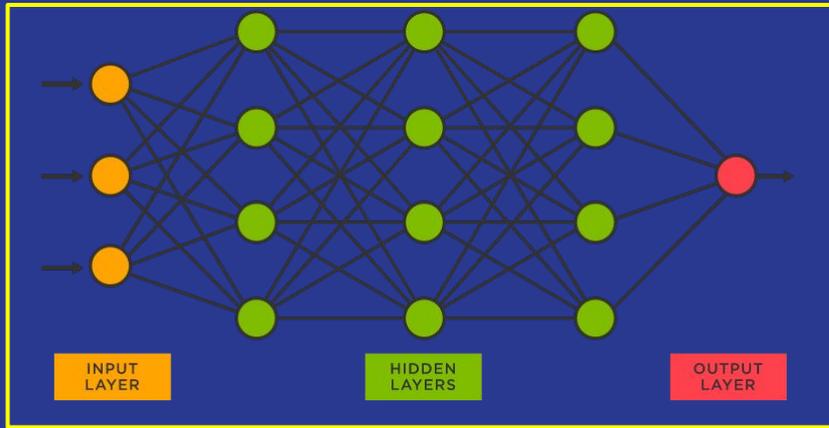
Relazione → forma-pensiero fondamentale



Il percettrone



(Frank Rosenblatt)



Riconoscere e Associare

Funzione come domanda:

- diretta (calcolare, associare, apprendimento supervisionato...)
- inversa (equazione, distinguere, apprendimento non supervisionato...)

Funzione \rightarrow Risultato non ambiguo

(ovvero *Tutti = Nessuno*)

Funzione Iniettiva \rightarrow Quando è
possibile e quando non lo è...

Il principio della piccionaia



Il mago esce, lo spettatore sceglie 5
carte, l'assistente ne capovolge una,
il mago rientra in sala e indovina la
carta coperta....



Una scommessa che sono sicuro di vincere: Qui in sala ci sono almeno 2 persone che conoscono lo stesso numero di altre persone

$$P_1 \rightarrow 1$$

$$P_2 \rightarrow 2$$

$$P_3 \rightarrow 3$$

...

$$P_{N-1} \rightarrow N-1$$

$$P_N \rightarrow ?$$

Prendiamo n numeri (qualsiasi!) in un ordine (qualsiasi!): si può sempre trovare un sottoinsieme di valori in sequenza, tale che la loro somma è un multiplo di n

(da “*IL LIBRO*”...)

Basta considerare l'insieme

$$\{0; a_1; a_1+a_2; \dots; a_1+a_2+\dots+a_n\}$$

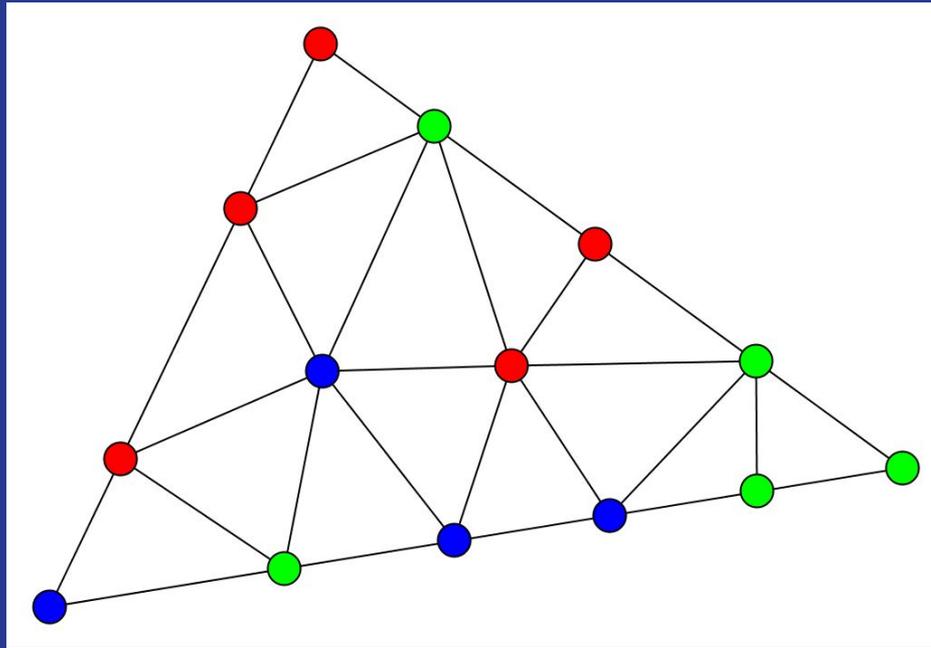
e la funzione che associa a ogni elemento il resto della sua divisione per n (che al massimo vale $n-1$)...

...il dominio contiene $n+1$ elementi,
l'immagine ne contiene solo n , quindi ci
sono almeno due somme con lo stesso
resto nella divisione per n ...

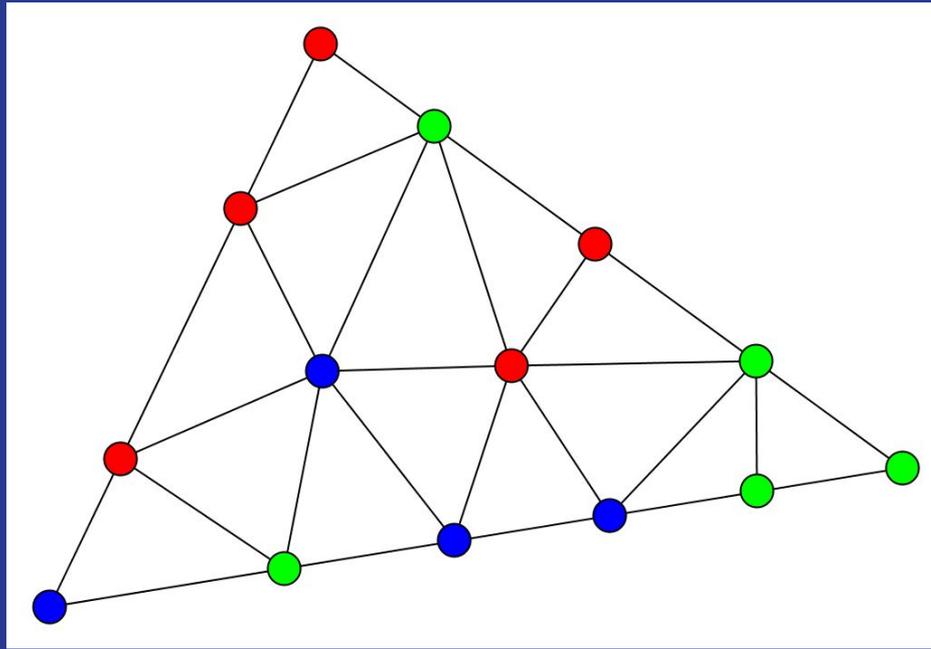
...quindi, se $a_1 + a_2 + \dots + a_{n1}$ e $a_1 + a_2 + \dots + a_{n2}$ hanno lo stesso resto nella divisione per n , allora la somma da a_{n1} ad a_{n2} è un multiplo di n

Funzione Suriettiva → Le domande impossibili

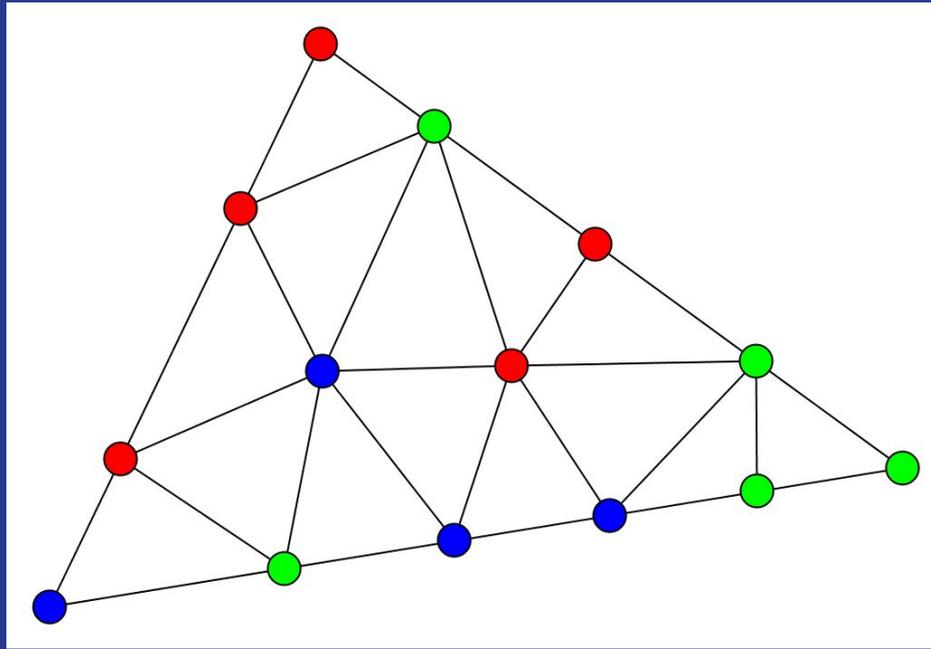
banalmente $x^2 = -9$, ma anche...



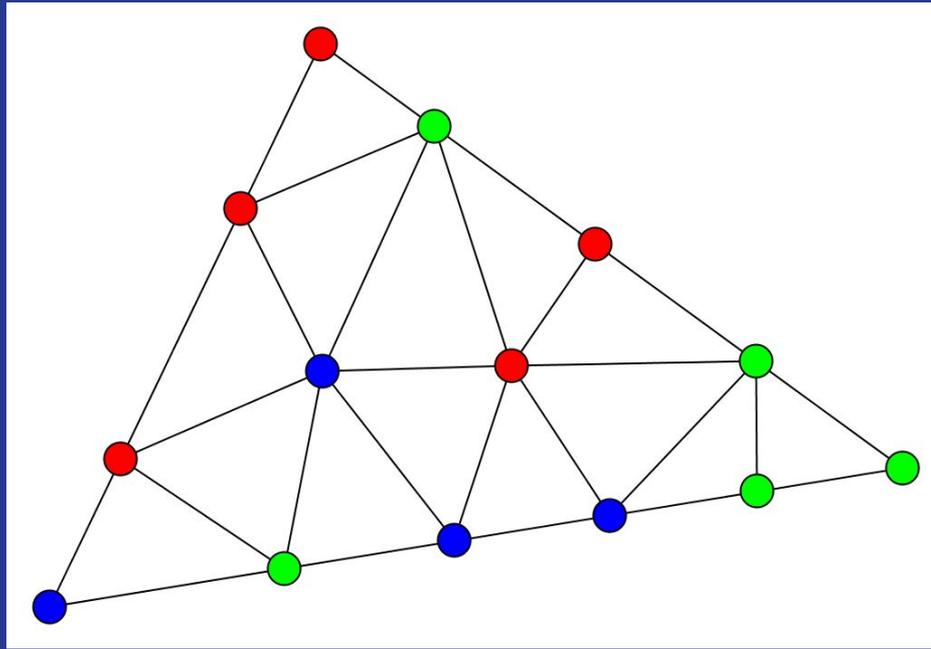
Lemma di Sperner



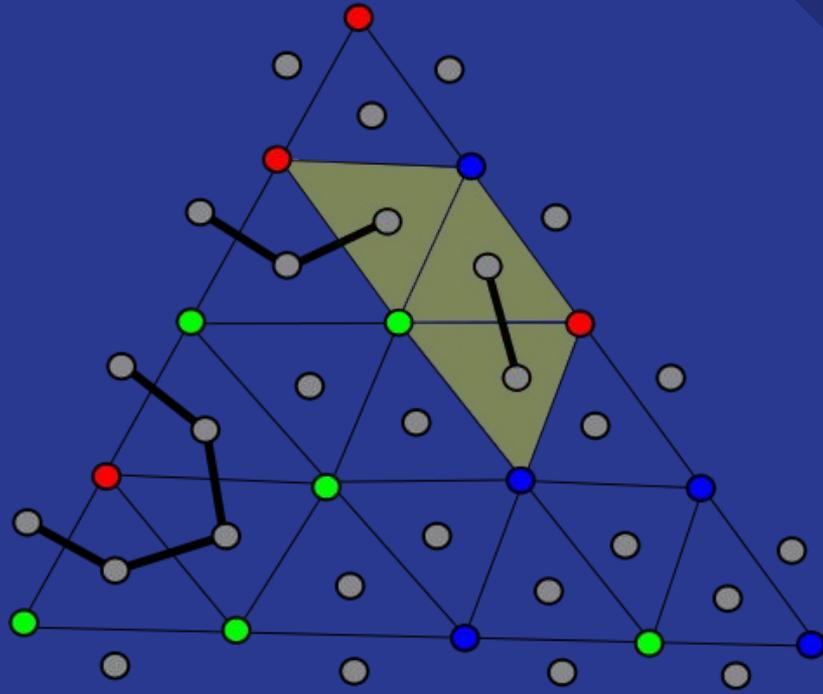
I vertici del triangolo grande sono di colore diverso



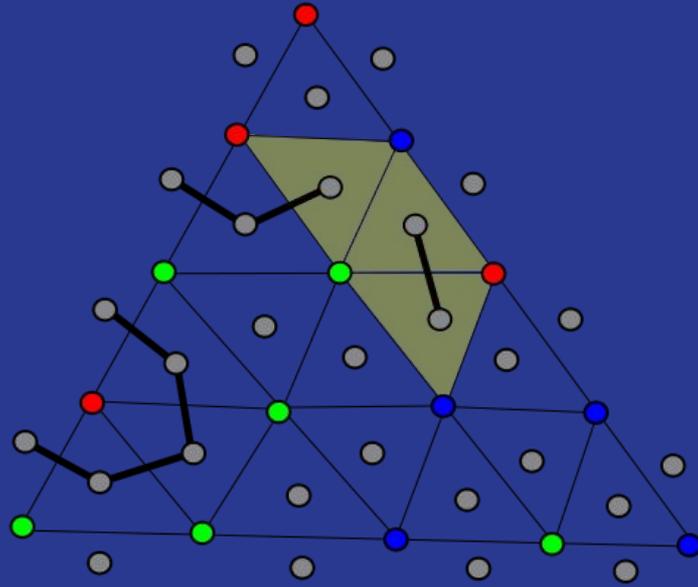
Sul lato rosso-blu possono stare solo punti rossi o punti blu, ecc.



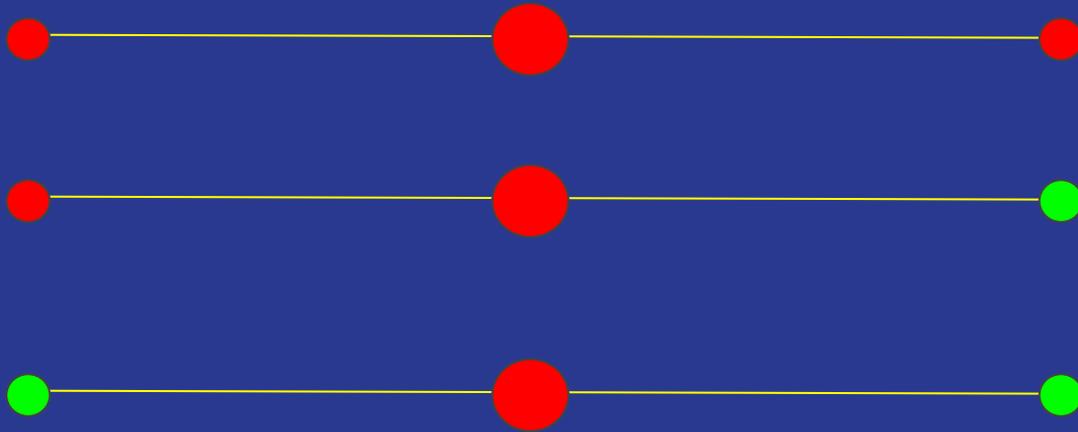
Per i punti interni non c'è nessuna prescrizione, né sul numero né sul colore



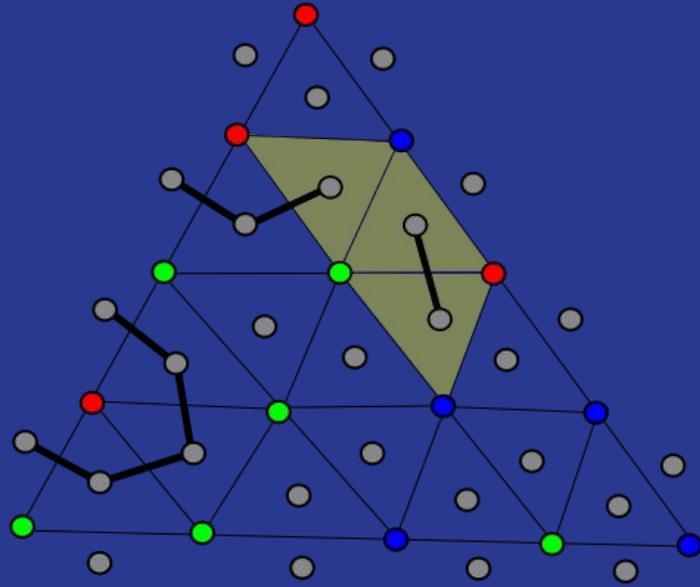
Le porte sono i lati rosso-verde...



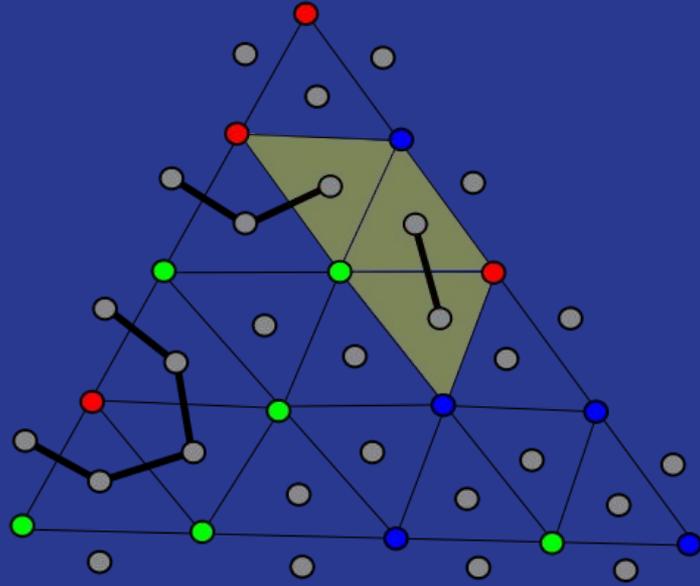
Le stanze possono avere: nessuna,
una (rvb) e due porte (rrv, rvv)



Cosa succede se aggiungo una r tra due r , tra due v , tra una r e una v ?...

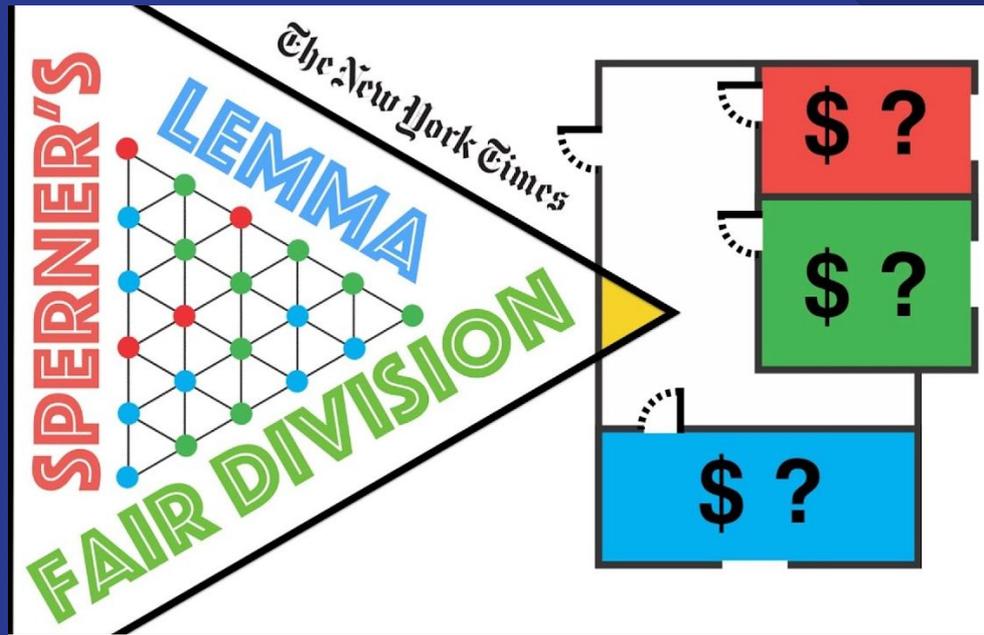


Quindi un visitatore che passi una sola volta da ogni stanza, una volta entrato non potrà più uscire...



...e quindi deve esistere almeno una stanza con una sola porta (rvb)!





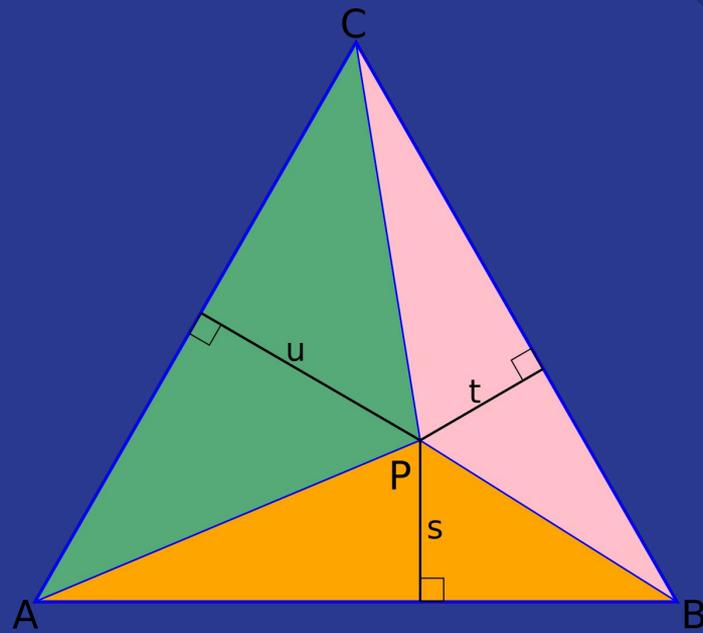
Il problema della divisione equa delle quote di affitto (NYT, 4/28/2014)

appeared in: *Amer. Math. Monthly*, 106(1999), 930-942.
Copyright the Mathematical Association of America 1999. All rights reserved.

**RENTAL HARMONY:
SPERNER'S LEMMA IN FAIR DIVISION**

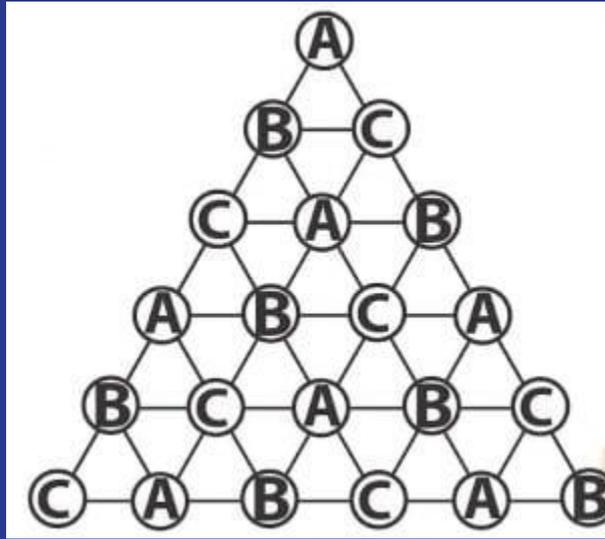
FRANCIS EDWARD SU

My friend's dilemma was a practical question that mathematics could answer, both elegantly and constructively. He and his housemates were moving to a house with rooms of various sizes and features, and were having trouble deciding who should get which room and for what part of the total rent. He asked, "Do you think there's always a way to partition the rent so that each person will prefer a different room?"

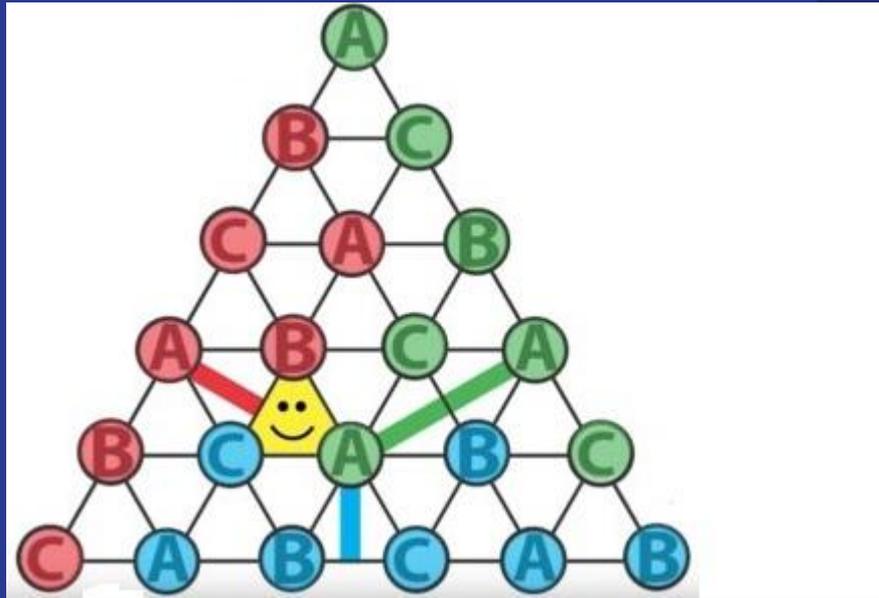


La somma delle distanze dai lati di un punto interno a un triangolo equilatero è costante

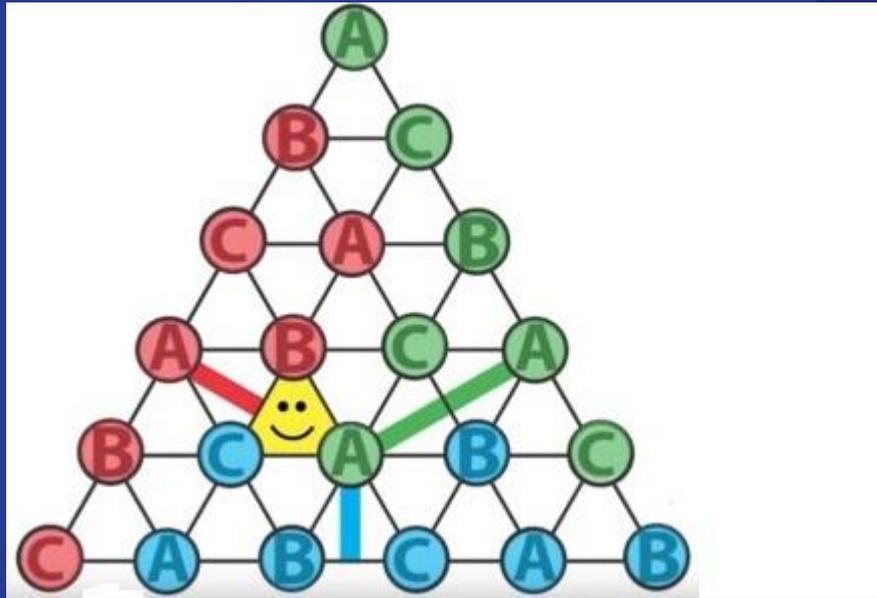
(Vincenzo Viviani, 1659)



I punti del triangolo vengono suddivisi in parti uguali tra gli inquilini...



...e ogni inquilino sceglie il colore dei punti di sua competenza...



...il lemma di Sperner ci garantisce
che esiste una soluzione che mette
tutti d'accordo!

Le funzioni continue \rightarrow Inevitabili incontri

*Ovvero, il teorema di Bolzano e le sue
innumerevoli conseguenze...*

Continuità → caratterizzazioni:

- definizione rigorosa
- grafico senza staccare la penna dal foglio
- valori intermedi

Il teorema dei valori intermedi non è equivalente alla continuità, ma ha un forte potenziale semantico (e quindi didattico); ad esempio...

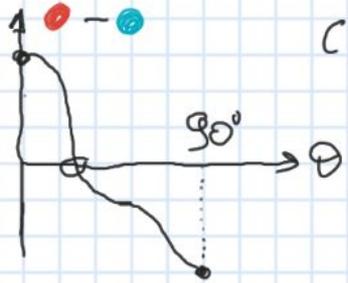
Il teorema del tavolo traballante



Tavolo a base quadrata  1) i due blu sono appoggiati, i 2 rossi non toccano

2) Inclino il tavolo in modo che la distanza dal pavimento dei due rossi sia lo stesso

3) Ruoto di 50° - i rossi e blu si sono scambiati.

4)  C'è un angolo per cui rossi e blu hanno la stessa distanza dal pavimento, e tale distanza deve essere 0, altrimenti il tavolo galleggerebbe nel vuoto.



Ma anche...

- teorema delle due frittelle
- teorema di Borsuk-Ulam
- il problema del viaggio di andata e ritorno
- e molti altri...