

**Alcune difficoltà degli studenti a
condividere la razionalità del
pensiero probabilistico.**

Domingo Paola



**GRUPPO
FORMAZIONE
MATEMATICA
TOSCANA**
“Giovanni Prodi”

**38° CONVEGNO
SULLA
DIDATTICA
DELLA
MATEMATICA**

9 settembre 2021

Il *perché?* è alla base dell'imparare



- I bambini [...] ci pongono le domande più strane e ci richiedono le risposte più imbarazzanti. Sono creature meravigliose, impossibili da prevedere ...

[H. von Foerster, 1985]



Rispondere ai *perché?* richiede la ricerca di spiegazioni

- Spiegare vuol dire prevedere ...
- Cercare spiegazioni per fare previsioni è una caratteristica di Homo Sapiens
- ...ma fare previsioni è difficile ... affinché il concetto di probabilità entri esplicitamente nella storia della matematica bisogna attendere il secolo XVII ...



Ma che cosa ci dicono le risposte degli studenti ad alcune domande delle prove INVALSI?



Domanda 19 del grado 2 - 2013

D19. Un bambino, senza guardare, prende una pallina dal sacchetto che vedi.



Di quale colore è più facile prendere la pallina?
Tre bambini rispondono così:

Mario: È più facile prendere una pallina bianca.

Giorgia: È più facile prendere una pallina nera.

Luca: È facile allo stesso modo prendere una pallina bianca o una nera.

Chi ha ragione?

- A. Mario
- B. Giorgia
- C. Luca

Risultati nazionali

Risposte corrette



- Risposte corrette 46.1%
- Risposte errate 51.2%
- Risposte Mancate 2.7%

D19. Un bambino, senza guardare, prende una pallina dal sacchetto che vedi.



Di quale colore è più facile prendere la pallina?
Tre bambini rispondono così:



È più facile prendere una pallina bianca.

10,7%

È più facile prendere una pallina nera.



È facile allo stesso modo prendere una pallina bianca o una nera.

40,5%



Chi ha ragione?

- A. Mario
B. Giorgia
C. Luca

▪ *Pensiero magico?*

▪ *Difficoltà a esprimere valutazioni quantitative sull'accadere di eventi incerti?*

Domanda 25 del grado 5 - 2015

D25. Nelle classi quinta A e quinta B deve essere sorteggiato un alunno per classe per partecipare a un concorso.

Le classi sono così formate:

Quinta A	Maschi	8
	Femmine	8
Quinta B	Maschi	8
	Femmine	16

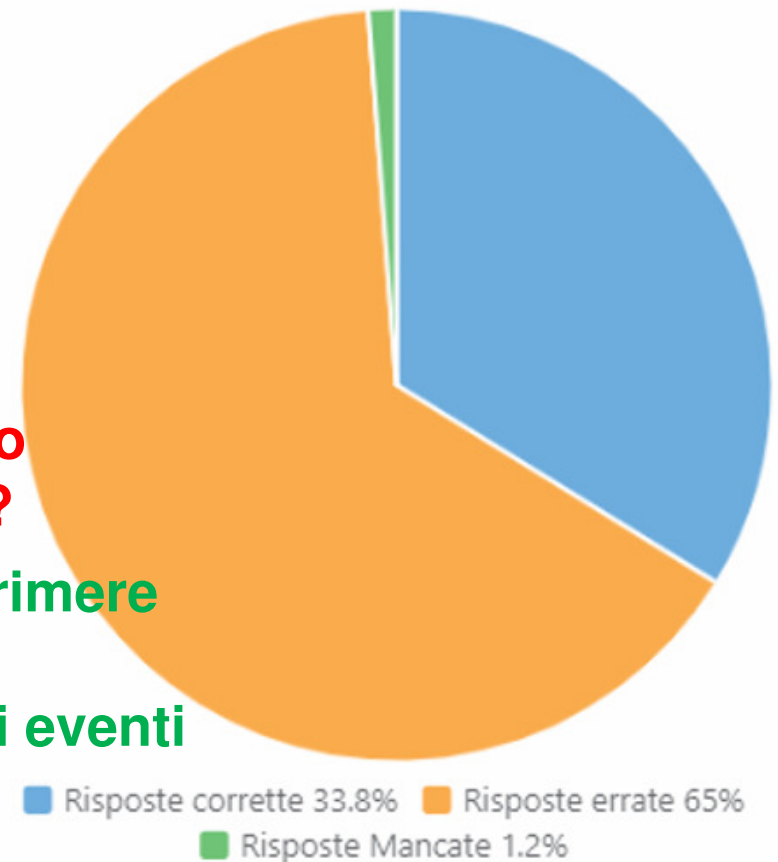
La probabilità che sia sorteggiato un maschio

- A. è maggiore nella quinta A
- B. è maggiore nella quinta B **11,7%**
- C. è la stessa nelle due classi **48%**
- D. dipende da chi fa il sorteggio **5,3%**

Confrontano solo i casi favorevoli?

Difficoltà a esprimere valutazioni sull'accadere di eventi incerti?

Risultati nazionali



Domanda 24 del grado 5 - 2018

D24. Alcuni bambini giocano con un dado a sei facce non truccato. Vince chi ha scommesso sul numero che è uscito più volte dopo 20 lanci. Dopo ogni lancio, su una tabella, mettono una crocetta (X) vicino al numero che è uscito.

Dopo 17 lanci la situazione è la seguente:

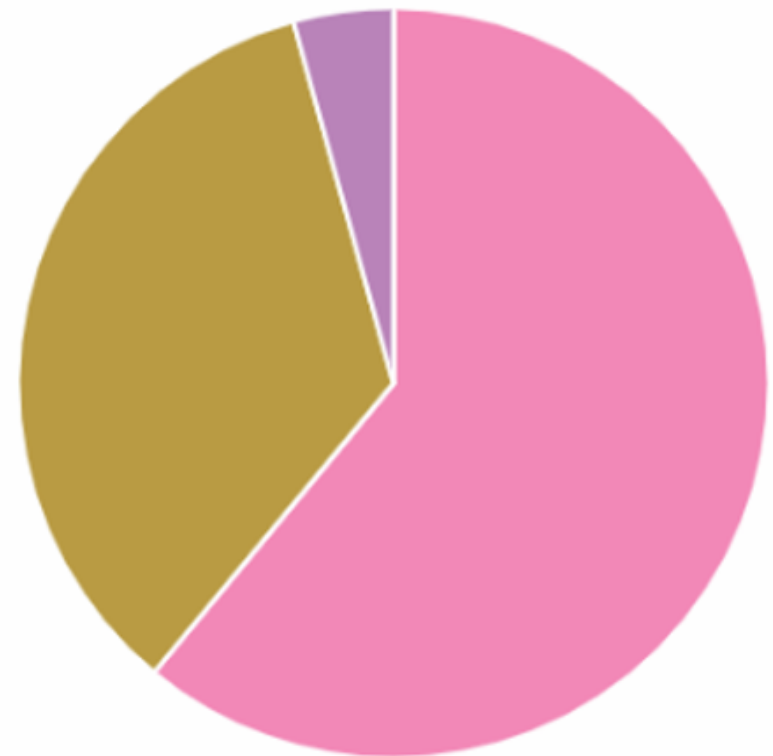


NUMERO	
1	X X X
2	X X
3	X X X
4	X X X X X
5	X
6	X X X

b. Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

- A. Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti
- B. Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti
- C. Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire
- D. Il 3 perché è un numero fortunato

Risultati nazionali



Risposte corrette 61% Risposte errate 34.7%
Risposte Mancate 4.3%

Domanda 24 del grado 5 - 2018

D24. Alcuni bambini giocano con un dado a sei facce non truccato. Vince chi ha scommesso sul numero che è uscito più volte dopo 20 lanci. Dopo ogni lancio, su una tabella, mettono una crocetta (X) vicino al numero che è uscito.
Dopo 17 lanci la situazione è la seguente:



NUMERO	
1	X X X
2	X X
3	X X X
4	X X X X X
5	X
6	X X X

b. Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

- A. Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti **19,8%**
- B. Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti **11,2%**
- C. Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire
- D. Il 3 perché è un numero fortunato **3,7%**

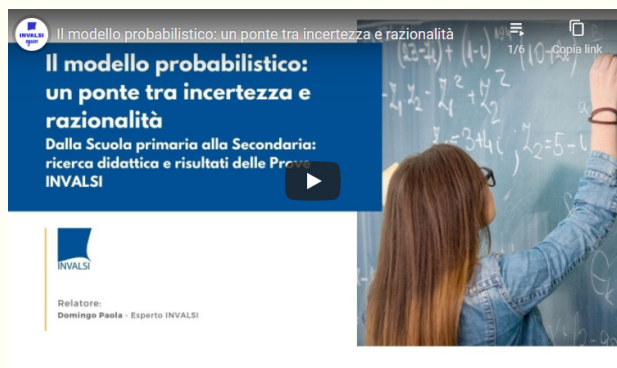
Testimonianza di pensiero magico? ...Incoerenza con il pensiero probabilistico

Il 4 ha frequenza assoluta maggiore di quelle degli altri numeri ... Coerenza con il pensiero probabilistico

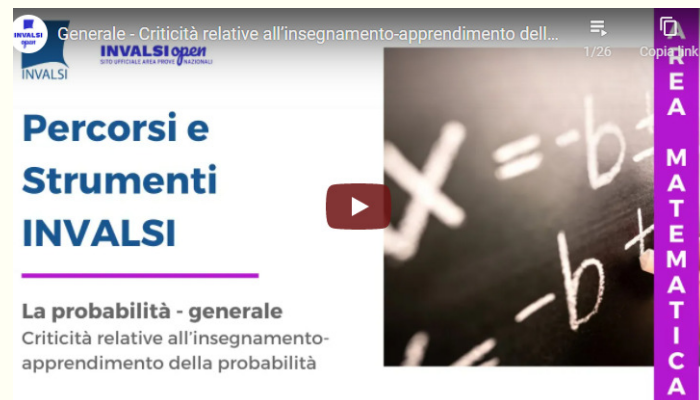
Il caso ha memoria ... Incoerenza con il pensiero probabilistico

Per approfondimenti ...

<https://youtu.be/INdjHOMbMTI>



<https://youtu.be/Yjq5HCwO1c0>



<https://youtu.be/PyeSPmfLRsc>



<https://youtu.be/3WY-yPBeyLY>



<https://youtu.be/8ZAszGoGfX0>



Domanda 8 CBT del grado 8 – 2018 rilasciata nel 2019

Domanda

Una classe è formata da 22 alunni, 14 maschi e 8 femmine.

La domanda risulta di livello 5, il più elevato dei livelli di difficoltà delle domande delle prove INVALSI



Domanda 2/2

Dalla stessa classe si scelgono a caso due studenti, un maschio e una femmina, per partecipare a un'indagine statistica. Paolo vorrebbe partecipare: quale probabilità ha di essere scelto?

Scrivi la risposta in forma di frazione.

Digita la risposta alla domanda.

Risposta:

1/14

CHE COSA ACCADE ALLA FINE DELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO?

Le risposte degli studenti a una domanda del grado 10



Domanda 18 del grado 10 - 2015

Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce "Effetti collaterali" si legge che:

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini;
- il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.

I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l'uno dall'altro.

a. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco non abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in forma percentuale.

Risposta:**93**..... %

b. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali?

- A. 9%
- B. 0,14%
- C. 14%
- D. 0,9%

Primo quesito (a)

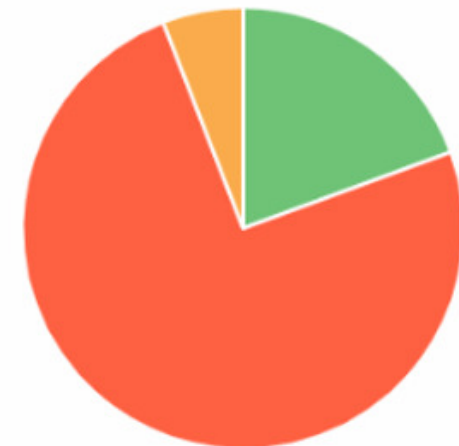
Risposte corrette



- Risposte corrette 58.4%
- Risposte errate 29.6%
- Risposte Mancate 12%

Secondo quesito (b)

Risposte corrette



- Risposte corrette 19.4%
- Risposte errate 74.7%
- Risposte Mancate 5.9%

Domanda 18 del grado 10 - 2015

=====**Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce "Effetti collaterali" si legge che:**=====

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini;
- il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.

I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l'uno dall'altro.

- a. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco non abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in forma percentuale.

Risposta:**93**..... %

- b. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali?

- A. 9% **43,7%**
B. 0,14%
C. 14% **6,4%**
D. 0,9% **24,6%**



IL PERCORSO SCOLASTICO SEMBRA AVERE POCA EFFICACIA

Bisognerebbe proporre attività che facciano riflettere su:

- l'eventuale presenza di tracce più o meno consistenti di forme di pensiero magico anche presso studenti che non frequentano più la scuola primaria;
- eventuali convinzioni sulla inutilità a tenere conto delle informazioni di cui si entra in possesso per effettuare valutazioni e stime di eventi in situazioni caratterizzate da incertezza;
- eventuali convinzioni sulle regolarità del caso che confliggano con il modello probabilistico.

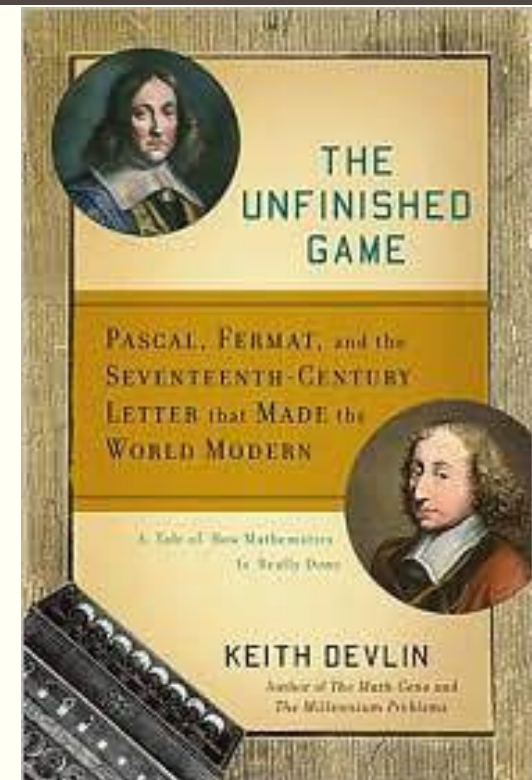
IL PROBLEMA DELLE PARTI

Paola, D. (2019). Un'esperienza di avvio al pensiero probabilistico nella prospettiva di educare alla razionalità, in *Educare alla razionalità - Tra Logica e Didattica della Matematica* - (a cura di Morselli, F., Rosolini, G., Toffalori, C.) Atti del convegno di Sestri Levante 9-11 giugno 2016 in ricordo di Paolo Gentilini, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.



IL PROBLEMA DELLE PARTI

Due giocatori A e B decidono di giocare a testa o croce con una moneta non truccata. Ogni partita, corrispondente a ogni lancio della moneta, è vinta da A se esce testa e da B se esce croce. Vince il gioco, e quindi l'intera posta in gioco p , il giocatore che per primo arriva a vincere un numero convenuto n di partite. Però, prima che il gioco sia terminato, cioè prima che uno dei due giocatori abbia vinto n partite, i giocatori sono costretti a interrompere il gioco; in quel momento A ha vinto a partite, mentre B ne ha vinte b . Come va suddivisa la posta in gioco in modo tale che la divisione sia equa?



La soluzione di Luca Pacioli (1494)

- Pacioli propone di dividere la posta in parti direttamente proporzionali alle partite vinte prima dell'interruzione.

Per esempio, nel gioco $(n; a, b)$ che viene interrotto quando A ha vinto a partite e B ne ha vinte b e vince chi per primo arriva a n partite vinte, Pacioli suddivide la posta p dando ad A

$$V(A) = \frac{a}{a+b} p \quad \text{e a B} \quad V(B) = \frac{b}{a+b} p$$



La soluzione di Pietro Cataneo (1559)

- Cataneo ragiona sul numero massimo di mani che possono essere giocate affinché il gioco $(n; a, b)$ si concluda, che è $2n - 1$.

Per esempio, nel caso $(8; 5,3)$, il numero massimo di mani è 15. Cataneo suddivide una porzione della posta in base al punteggio che hanno i due giocatori al momento dell'interruzione e la porzione rimanente la suddivide in parti uguali. A prende i $5/15$ della posta e B ne prende i $3/15$. Gli altri $7/15$ della posta vanno divisi in parti uguali.

$$V(A) = \frac{5}{15}p + \frac{7}{30}p = \frac{17}{30}p$$

$$V(B) = \frac{3}{15}p + \frac{7}{30}p = \frac{13}{30}p.$$



La soluzione di Gerolamo Cardano (1529)

Cardano propone di dividere la posta in parti inversamente proporzionali al numero di mani che i due giocatori devono ancora vincere per potersi aggiudicare l'intera partita rapportate al numero delle mani ancora da giocare.

Nell'esempio $(60; 20, 50) = (-40, -10)$ si ottiene

$$V(A) = \frac{10}{50} \quad V(B) = \frac{40}{50}$$



Grazie!!



- www.matematica.it/paola
- domingo.paola56@gmail.com