

La matematica nella Cupola Santa Maria del Fiore a Firenze

di

Giuseppe Conti

Dipartimento di Matematica DIMAI Università di Firenze



Fig. 1 La Cupola di Santa Maria del Fiore

La Cupola del Duomo di Santa Maria del Fiore di Firenze, innalzata dal Brunelleschi fra il 1420 ed il 1436, ha sempre colpito la fantasia dei visitatori e l'interesse degli studiosi; questo è dovuto sia alla sua bellezza, sia alla sua innovativa (e “misteriosa”) tecnica costruttiva, sia alle sue dimensioni: il suo diametro interno misura 45 metri, quello esterno 54 metri, la sua base si

trova a 55 metri dal suolo; la Cupola raggiunge 91 metri e, con la Lanterna, che pesa circa 750 tonnellate, essa arriva a circa 116 metri; il suo peso è di circa 29.000 tonnellate.

Anzitutto, è interessante notare che le misure degli elementi che compongono la Cupola determinano delle proporzioni “auree”. Infatti, la Cupola inizia da un’altezza di 55 metri, poggia su un tamburo di 13 metri, è alta mediamente 34 metri ed è sormontata dalla Lanterna di 21 metri. Si possono riconoscere alcuni numeri della successione di Fibonacci, che, com’è noto, sono legati alla sezione aurea. Questo fatto è ben noto anche agli studiosi di musica; infatti, quando la Cupola fu consacrata nel 1436, il famoso musicista fiammingo G. Dufay compose per l’occasione il mottetto “Nuper rosarum flores”; questa composizione riproduceva, tra l’altro, i rapporti presenti nella Cupola di Santa Maria del Fiore, cioè proprio quelli legati alla sezione aurea.

Nella presente nota voglio evidenziare il ruolo che la matematica ha avuto nello studio di questo importante monumento. Non deve meravigliare il fatto che la matematica si sia rivelata uno strumento così notevole; infatti Brunelleschi era anche un matematico: egli fu il primo che dette le regole geometriche della prospettiva e, per questo motivo, è citato in tutti i più importanti testi di storia della matematica, come il Boyer, il Kline, il Loria. Inoltre, egli era circondato da altri valenti matematici, come Paolo dal Pozzo Toscanelli e Giovanni dell’Abaco.

La Cupola è formata da otto “spicchi”, chiamati “vele”; ciascuna di queste è una porzione di cilindro ellittico. I costoloni di spigolo, che all’esterno sono ricoperti di marmo bianco, sono archi di circonferenza, mentre la sezione mediana di ciascuna vela è un arco di ellisse. Su questo fatto ci sono state numerose polemiche nel passato ed anche oggi vengono fatte affermazioni inesatte su tale questione.

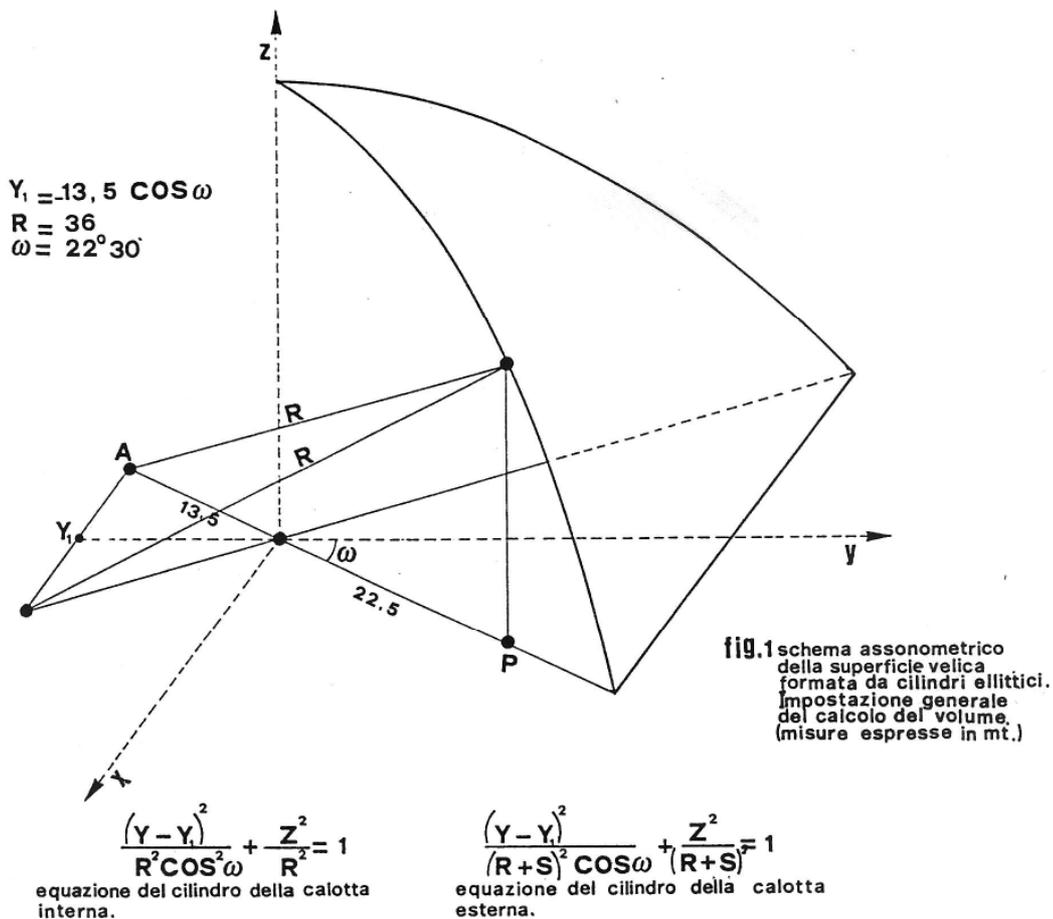


Fig. 2 Cilindro ellittico delle vele con la sua equazione

Per studiare questo problema, insieme ai professori Giovanni Anzani e Roberto Corazzi, abbiamo estratto dal rilievo degli otto costoloni di spigolo, eseguito con il laser-scanner, le coordinate di circa 500 punti per ciascun costolone che, nel rilievo suddetto, si trovano in una fascia dello spessore di 4 mm.

Successivamente abbiamo elaborato questi dati determinando la circonferenza dei "minimi quadrati"; in questo modo abbiamo ottenuto, per ciascun costolone, una circonferenza il cui raggio misura mediamente 36.18 metri, con uno "scarto quadratico medio" molto piccolo, dell'ordine di 1 cm. Tale risultato è molto interessante perché è quasi coincidente con la misura teorica di 36 metri che deve avere il raggio di ciascun costolone.

Per quanto riguarda i profili mediani delle vele della Cupola, abbiamo considerato i punti che si ottengono intersecando una vela con il piano perpendicolare alla base e passante per l'asse della Cupola. La curva teorica deve essere necessariamente un'ellisse, per cui abbiamo cercato la conica dei minimi quadrati e non la circonferenza. La conica che abbiamo ottenuto con tale

metodo è un'ellisse, in pieno accordo con le considerazioni teoriche, anche in questo caso con uno "scarto quadratico medio" molto piccolo.

Il profilo della Cupola interna è un "sesto" (che significa curvatura) di quinto acuto, mentre quella esterna è un "sesto" di quarto acuto. Il significato geometrico è il seguente.

Il diametro della cupola interna viene diviso in cinque parti uguali, mentre quello della esterna in quattro parti. Successivamente si punta il compasso nei due centri di quinto acuto, ciascuno dei quali si trova a 9 metri dall'estremità del diametro e si tracciano due archi di circonferenza con raggio pari a 36,00 metri. Puntando il compasso negli stessi punti, si tracciano gli archi di quarto acuto con raggio pari a 40,50 metri.

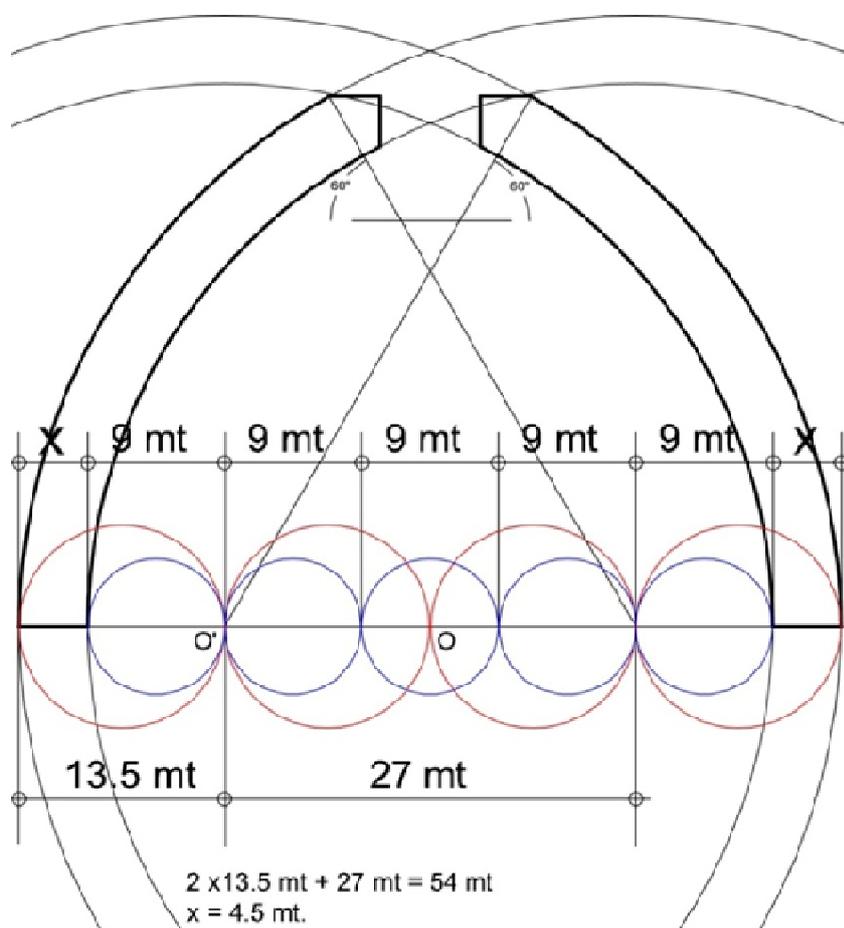


Fig. 3 Costruzione del profilo della Cupola

Come già aveva osservato Leonardo Ximenes nel XVIII secolo, il profilo della Cupola si avvicina molto ad una catenaria (Huygens fu il primo ad usare il termine "catenaria" in una

lettera a Leibniz nel 1690), la quale è la curva migliore per sostenere un arco soggetto solo al proprio peso, come aveva dimostrato Giovanni Bernoulli nel 1691.

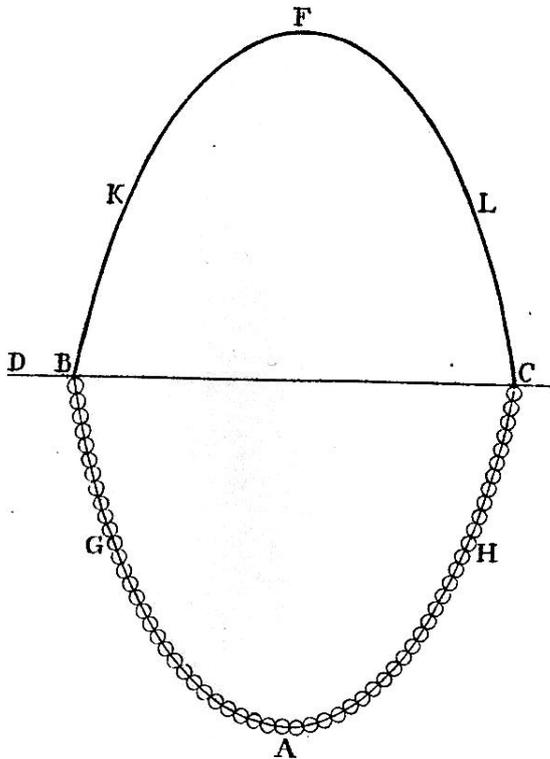


Fig. 4 La curva catenaria

Scrive, infatti, lo Ximenes:

“Il Brunelleschi non sapeva certamente che, sarebbon venuti dopo di lui alcuni Geometri che avrebbon dimostrato che per dare ad un arco, ad una volta, ad una cupola quella curvità che facesse massima la sua resistenza, era necessario di dare a quell’arco l’andamento di una curva catenaria rovesciata.

Eppure egli è certissimo, che il sesto della nostra cupola è tale che si accosta assai dappresso alla curva catenaria, curva assai acconcia alla costruzione delle cupole”

Abbiamo eseguito una verifica anche di questo fatto, come si può vedere dalla figura seguente.

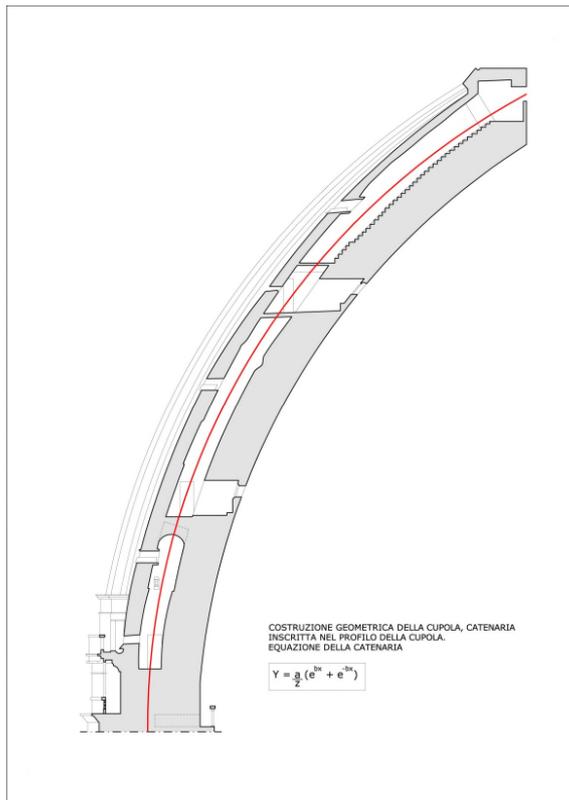


Fig. 5 La curva catenaria della Cupola

Osserviamo che, in realtà, la Cupola di Santa Maria del Fiore è formata da due cupole: una interna, che è la struttura portante ed ha uno spessore di circa 2,4 metri, ed una esterna, più sottile (circa 0,9 metri), la quale, come disse il Brunelleschi, serve a proteggere la cupola interna dalle intemperie e dagli sbalzi di temperatura ed a renderla "più magnifica e gonfiante". Fra queste due cupole vi è uno spazio di circa 1,2 metri, attraverso il quale è possibile salire fino alla sua sommità, cioè alla base della lanterna.

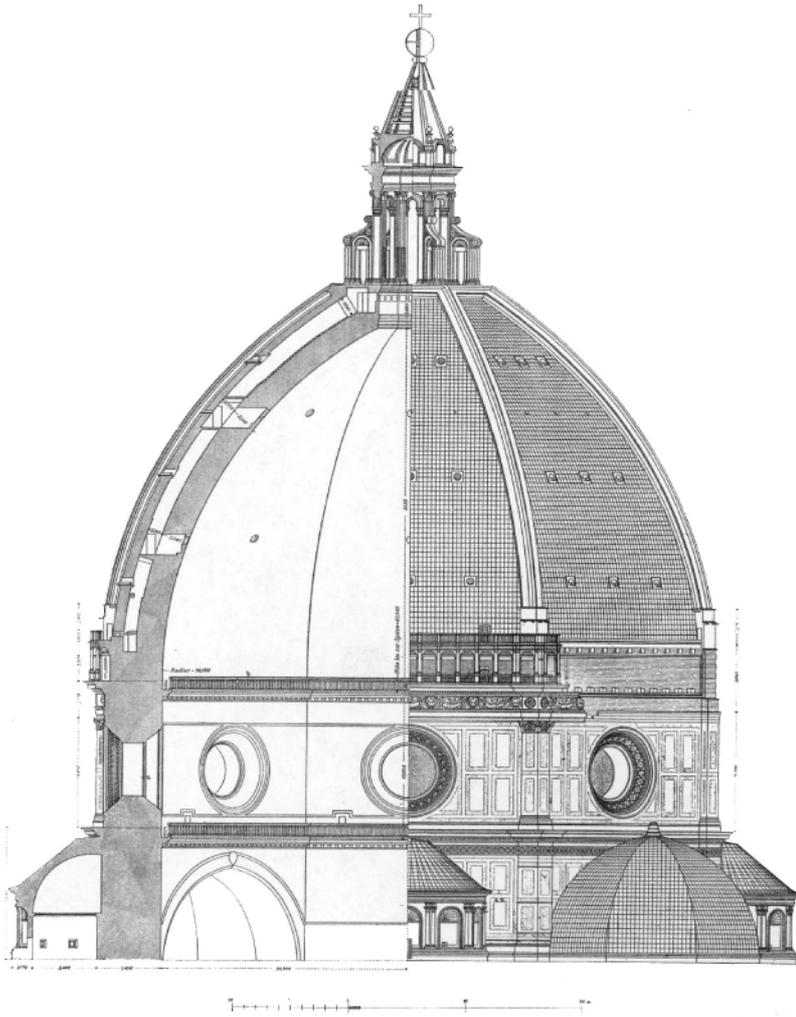


Fig. 6 Spaccato della Cupola

Salendo sulla Cupola abbiamo, alla destra, la cupola interna e, alla sinistra, quella esterna; possiamo così notare la particolare disposizione dei mattoni che la compongono: essi non sono messi, come ci si potrebbe aspettare, secondo linee orizzontali, cioè parallele al piano terra, ma alcuni sono disposti secondo linee curve (le cosiddette corde "blande" o "brande"), altri verticalmente (per coltello), formando la cosiddetta "spina pesce", altri sono disposti radialmente e convergono verso l'asse della cupola.

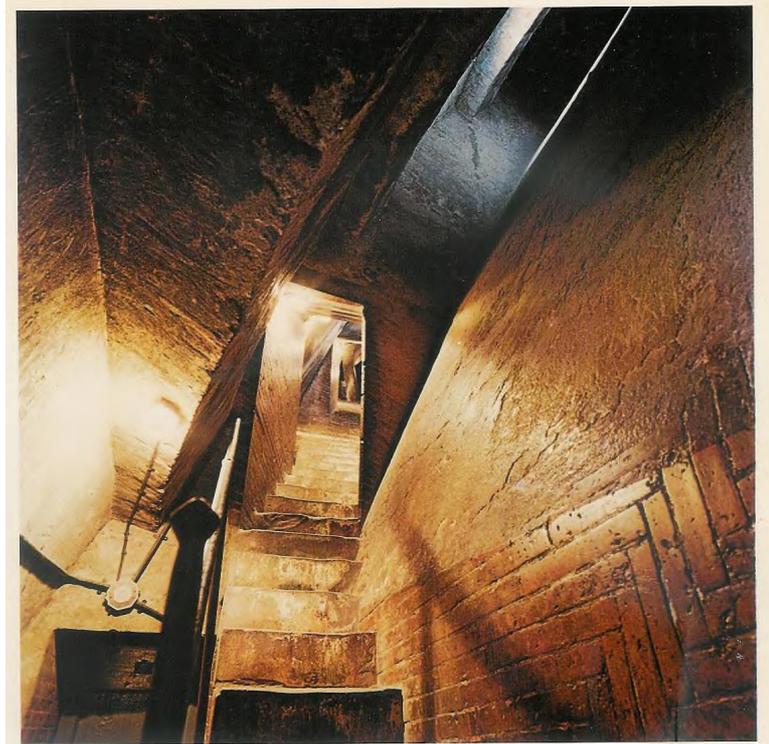


Fig. 7 Il camminamento fra la cupola interna (a destra) e quella esterna (a sinistra)

Perché il Brunelleschi ha disposto i mattoni in questo modo particolare e quale regola ha seguito per fare ciò? Egli non ha lasciato niente di scritto sul modo con cui ha costruito la Cupola; infatti esistono due sue relazioni (1420 e 1426) in cui si dice quali sarebbero state le caratteristiche della Cupola, ma non la tecnica con la quale egli l'avrebbe costruita.

Questo fu dovuto, molto probabilmente, ai rapporti molto contrastati che aveva con i fiorentini, i quali erano sempre polemici con lui e controllavano continuamente ciò che faceva: esiste nell'Archivio di Stato di Firenze una pergamena scritta nel 1425/26, durante la costruzione della Cupola, in cui il pratese Giovanni di Gherardo da Prato accusa il Brunelleschi di commettere gravi errori nella sua costruzione.

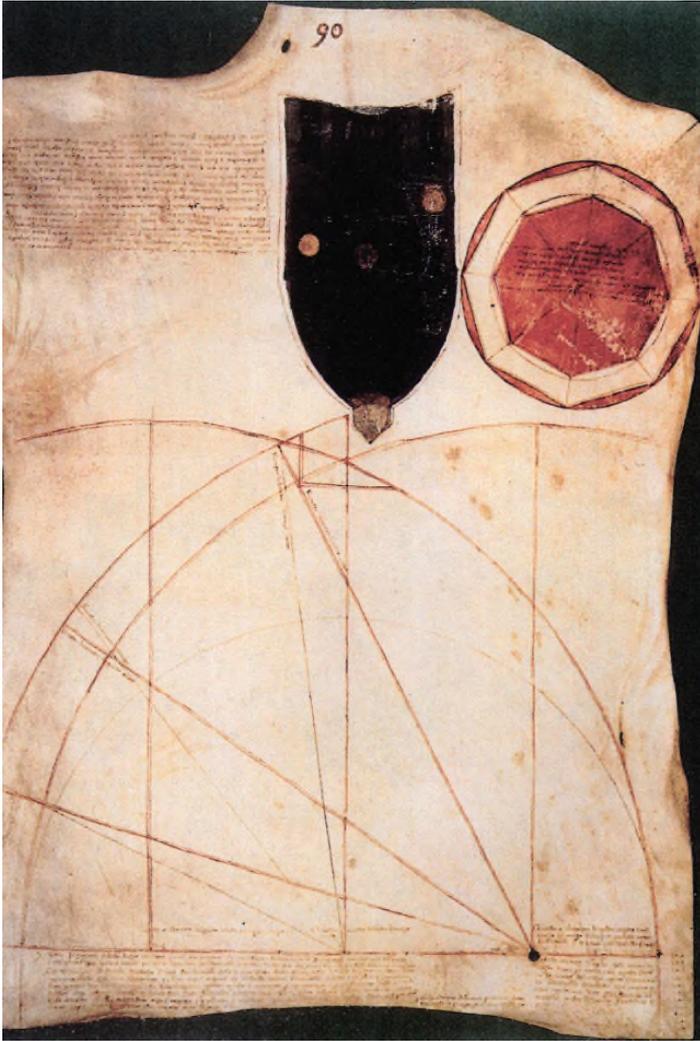


Fig. 8 Pergamena di Giovanni di Gherardo da Prato

La Cupola di Santa Maria del Fiore è a base ottagonale, a differenza di altre cupole di dimensioni analoghe che sono a base circolare (cupole di rotazione), come il Pantheon e la Cupola di San Pietro a Roma, la Cupola di Santa Sofia ad Istanbul. Brunelleschi sapeva che le cupole di rotazione sono più semplici da costruire, rispetto a quelle a base poligonale, ed hanno meno problemi dal punto di vista statico perché le forze si distribuiscono in maniera uniforme. Per questo motivo egli propose, con un raccordo murario, di rendere circolare la sua base; tuttavia, i fiorentini si opposero perché volevano che la cupola del Duomo avesse la stessa forma ottagonale di quella (più piccola) del Battistero di San Giovanni. E' interessante ricordare che quasi tutti i battisteri e le fonti battesimali hanno forma ottagonale per quello che affermò Sant' Ambrogio nel IV secolo: Dio aveva creato il mondo in sei giorni e il settimo si

riposò, ma l'opera non era completa per la presenza del peccato originale; l'ottavo giorno Gesù Cristo, con il Battesimo, tolse il peccato originale e completò l'opera del Padre.

Per le cupole di rotazione la tecnica costruttiva è abbastanza semplice: basta, ad esempio, disporre i mattoni secondo anelli circolari sovrapposti (i paralleli), il cui diametro si restringe man mano che si sale verso la sommità. In questo modo la struttura diventa autoportante, cioè si sostiene da sola durante la sua costruzione. Notiamo che i paralleli delle cupole di rotazione sono sempre perpendicolari alle linee meridiane, proprio come i meridiani ed i paralleli della superficie terrestre.

Questa tecnica non è possibile in una struttura a base ottagonale a causa della "discontinuità" che si presenterebbe nei vertici dell'ottagono: infatti, in questo modo, i letti di posa dei mattoni, appartenenti a due vele adiacenti, formerebbero un angolo proprio nel punto in cui le tensioni sono maggiori.

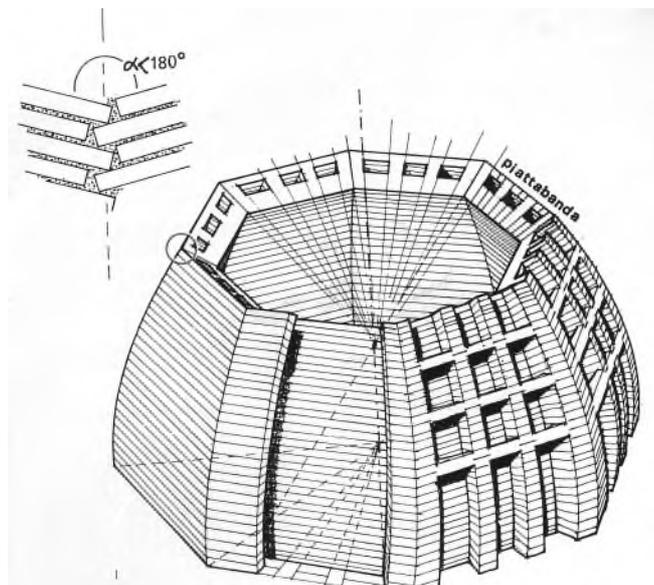


Fig. 9 Cupola ad anelli ottagonali

L'idea di Brunelleschi è stata quella di partire disponendo con continuità i mattoni negli spigoli d'angolo, come se la Cupola fosse di rotazione (e, quindi, autoportante in fase costruttiva).

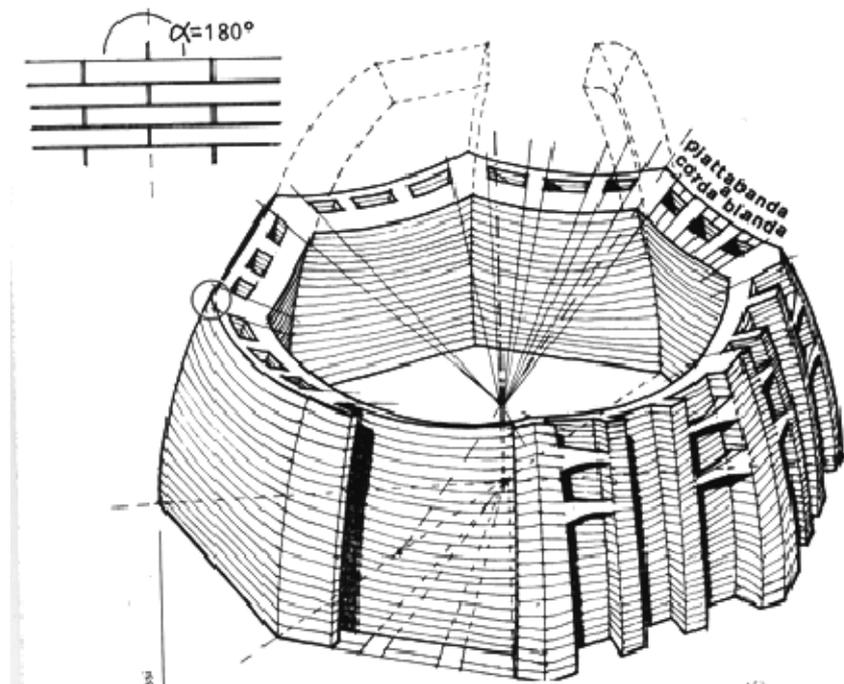


Fig. 10 Disposizione dei mattoni nella Cupola di Santa Maria del Fiore

Per fare ciò, egli ha collocato i mattoni sempre perpendicolarmente alle linee meridiane (come nelle cupole di rotazione); in questo modo i mattoni si dispongono secondo quelle linee (dette “lossodromiche ortogonali”), che possiamo osservare sulla Cupola (le “corde blande”). In altre parole, le “corde blande” corrispondono ai paralleli delle cupole di rotazione: la differenza consiste nel fatto che in queste ultime essi sono, come dice il nome, paralleli al piano terra, mentre nella Cupola del Brunelleschi essi hanno l'andamento curvilineo che vediamo.

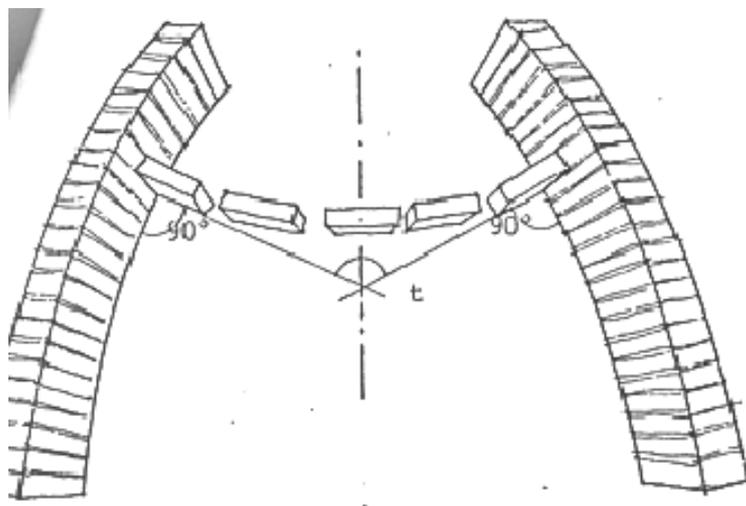


Fig. 11 Mattoni disposti ortogonalmente alle linee meridiane

Sono state elaborate diverse teorie riguardanti la tecnica usata dal Brunelleschi per disporre i mattoni a “corda blanda”; alla fine quelle più accreditate erano due: quella delle curve lossodromiche (principalmente, Ximenes, Chiarugi, Quilghini, Rossi) e quella delle curve ottenute come intersezione fra il cilindro e un cono variabile (Di Pasquale e altri). Notiamo che i sostenitori di queste teorie erano in forte contrasto fra loro, ciascuno ritenendo che soltanto la propria teoria fosse quella giusta.

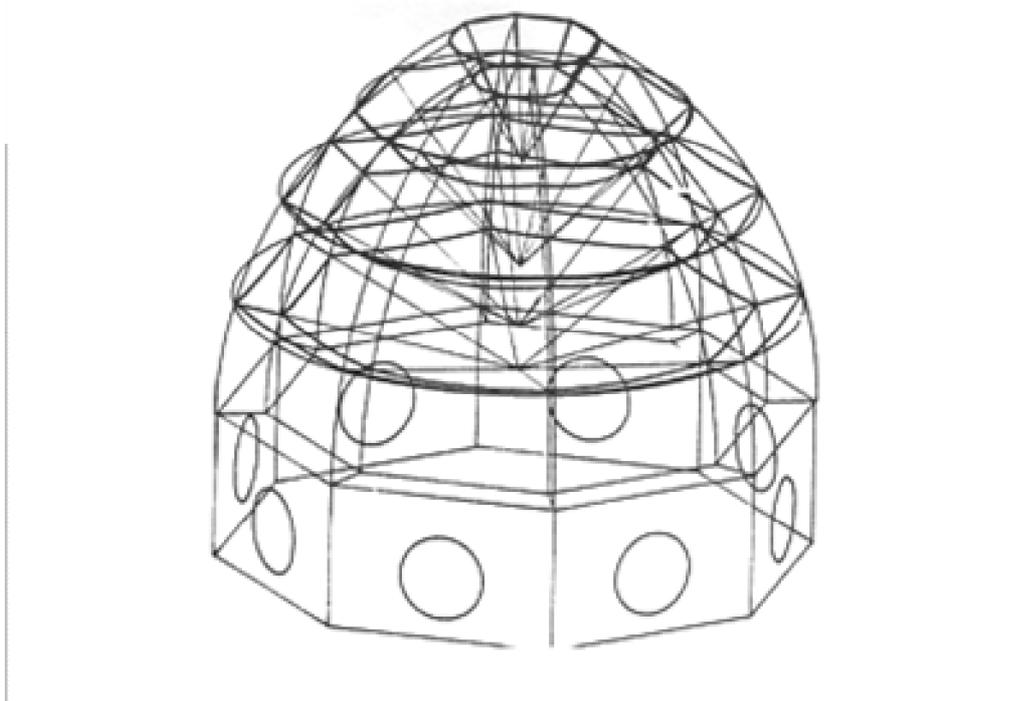


Fig. 12 “Corde blande” ottenute come intersezione fra il cilindro e un cono variabile

Io ho tradotto in formule matematiche le due ipotesi per vedere quali risultati si ottenevano; sono così giunto ad una conclusione estremamente interessante: queste due teorie, pur essendo formulate con parole e sfumature diverse tra loro, tanto da renderle apparentemente differenti, danno lo stesso risultato e forniscono un andamento delle “corde blande” uguale a quello descritto in precedenza. Gli accurati rilievi eseguiti da me e dal Prof. Corazzi hanno confermato che la Cupola reale coincide perfettamente con quella teorica ottenuta dalle suddette teorie; inoltre, in questo modo possiamo anche, come abbiamo fatto, provare che altre teorie sulla Cupola non hanno alcuna corrispondenza con l’oggetto reale.

Dunque la matematica permette di studiare a fondo le varie teorie, se riusciamo, naturalmente, a metterle in formule. Possiamo, così, sapere quale può essere l'oggetto che si otterrebbe dall'applicazione pratica di ciascuna ipotesi, senza essere obbligati a costruirlo.

Per quanto riguarda i mattoni disposti a “spina pesce”, notiamo che questi si sistemano secondo delle curve assimilabili ad eliche cilindriche ellittiche.

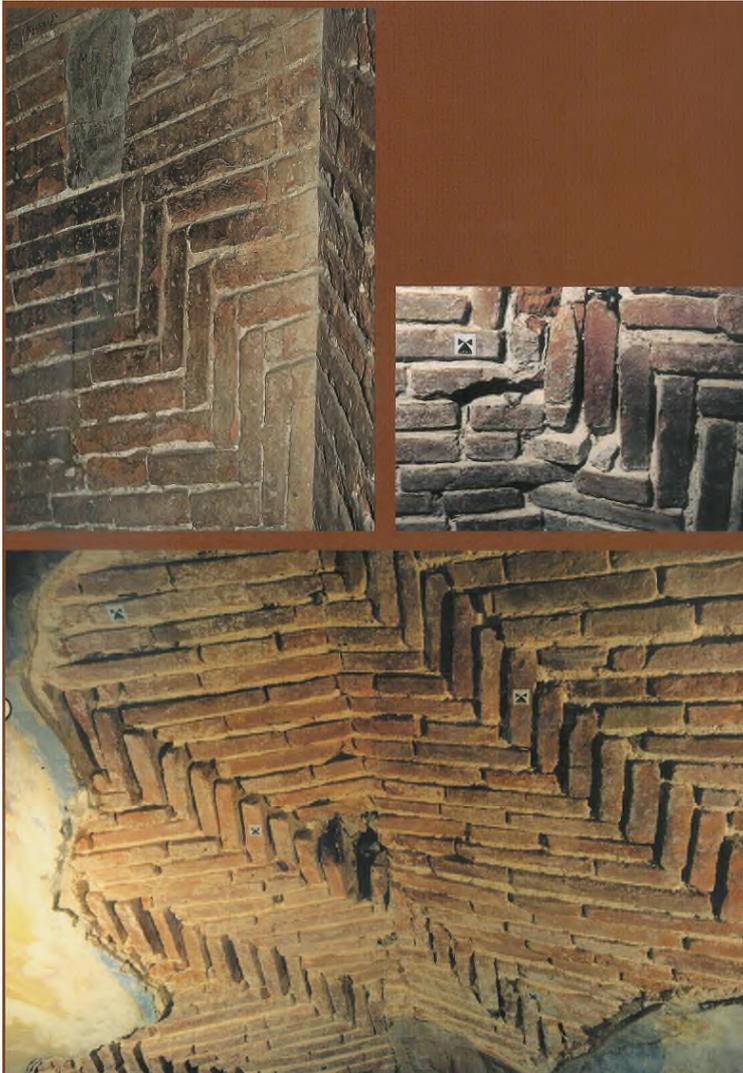


Fig. 13 Mattoni disposti a spina pesce nella Cupola del Brunelleschi

I mattoni disposti a “spina pesce” nella Cupola hanno la stessa funzione di quella delle cupole di rotazione: servono ad impedire lo scivolamento dei mattoni disposti a “corda blanda” durante la costruzione.

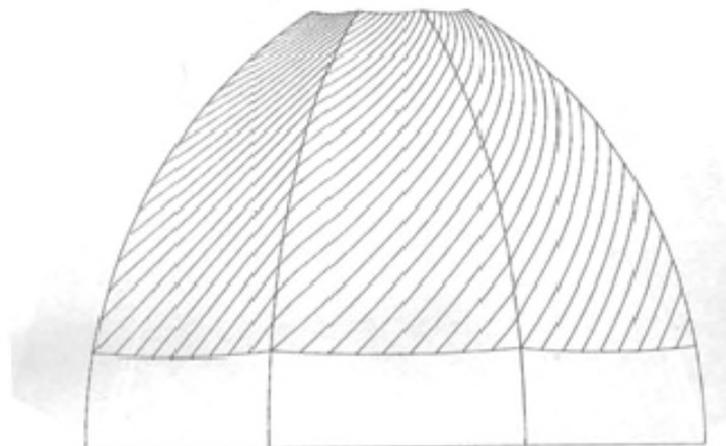


Fig. 14 Le eliche lungo le quali si dispongono i mattoni a “spina pesce”

Anche la scala che porta in cima alla Cupola segue una curva ad elica, ma “gira” nel verso opposto a quella della “spina pesce”. Anche questo fatto non è casuale, poiché in questo modo la struttura risulta rinforzata, esattamente come accade nelle doppie eliche del DNA o delle rampe di accesso allo stadio di Firenze.

Infine, concludiamo osservando che matematica serve anche a comprendere più a fondo la bellezza della Cupola. Infatti, come abbiamo già detto, le proporzioni fra le misure delle varie parti che la compongono sono riconducibili alla sezione aurea: esso è il rapporto più frequente, essendo il più armonioso che si usa (dall’antichità ai giorni nostri) in architettura e nell’arte in generale.

Bibliografia

BARTOLI L., *Il disegno della cupola del Brunelleschi*, Olschki, Firenze 1994.

BATTISTI E., *Filippo Brunelleschi*, Electa, Milano 1989.

CHIARUGI A., QUILGHINI D., *Tracciamento della cupola del Brunelleschi. Muratori e geometria*, in «Critica d’Arte», XLIX, s. IV, n. 3, 1984, pp. 38-47.

CONTI G., CORAZZI R., *La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi*, Edizioni Sillabe, Livorno 2005.

CORAZZI R., CONTI G., *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze*, Angelo Pontecorboli Editore, Firenze 2011.

DI PASQUALE S., *La costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore*, Biblioteca Marsilio, Venezia 2002.

FERRI W., FONDELLI M., FRANCHI P., GRECO F., *Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore*, «Bollettino di Geodesia e Scienze Affini dell' I.G.M.», XXX, 1971, pp. 158-184.

GURRIERI F., *La cupola*, in F. GURRIERI, G. BELLI, A. BENVENUTI PAPI, R. DALLA NEGRA, FABBRI P., TESI V., *La cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze*, Cassa di Risparmio di Firenze, Firenze 1994, I, pp. 81-135.

XIMENES L., *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e architettoniche*, Stamperia Imperiale, Firenze 1757.

ROSSI P.A., *Le cupole del Brunelleschi. Capire per conservare*, Calderoni, Bologna 1982.

SAALMAN H., *Filippo Brunelleschi. The cupola of Santa Maria del Fiore*, A. Zwemmer, London 1980.

SANPAOLESI P., *La Cupola di Santa Maria del Fiore. Il progetto-La costruzione*, Edam, Firenze 1977.